Über algebraische Gleichungen mit reellen Wurzeln und den sogen. casus irreducibilis bei kubischen Gleichungen.

Von

Alfred Loewy in Freiburg i. Br.

Im folgenden will ich, und zwar mit den einfachsten Hilfsmitteln, also im besondern, ohne die Galoissche Theorie zu benützen, einen Satz über algebraische Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln beweisen. Das, soweit mir bekannt, in der Literatur bisher noch nicht hervorgehobene Theorem handelt von den algebraischen Hilfsgleichungen, die unvermeidlich sind, wenn für eine algebraische Gleichung mit lauter reellen Wurzeln eine derselben durch ausnahmslos reelle Größen dargestellt wird. Der fragliche Satz lautet:

Satz I. $J(x) = 0$ sei eine algebraische Gleichung mit lauter reellen Wurzeln; die Koeffizienten von $J(x)$ sollen einem reellen Rationalitätsbereiche P angehören, in dem $J(x)$ eine irreduzible Funktion ist. Eine Wurzel ζ_1 der Gleichung $J(x) = 0$ sei rational mit Koeffizienten aus P dargestellt durch lauter reelle Größen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_k$, wo ϱ_1 einer Gleichung $X_1(x) = 0$ genügt, deren Koeffizienten P angehören und die in P irreduzibel ist, ϱ_2 einer Gleichung $X_2(x) = 0$, deren Koeffizienten dem durch Adjunktion von ϱ_1 erweiterten Rationalitätsbereiche (P, ϱ_1) angehören und die in diesem irreduzibel ist usw., endlich ϱ_k einer Gleichung $X_k(x) = 0$, deren Koeffizienten dem Rationalitätsbereiche $(P, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{k-1})$ angehören und die in diesem Bereiche irreduzibel ist. Die Grade aller Hilfsgleichungen $X_i(x) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ sollen Primzahlen sein. Hat $J(x) = 0$ den Grad $n = \overline{p}_1 \cdot \overline{p}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{p}_f$, wobei $\overline{p}_1, \overline{p}_2, \ldots, \overline{p}_f$ lauter (event. auch gleiche) Primzahlen bedeuten, so muß, wie bewiesen werden soll, das Gleichungssystem $X_i(x) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ mindestens f Gleichungen der Grade $\overline{p}_1, \overline{p}_2, \ldots, \overline{p}_f$ enthalten, und jede dieser f unvermeidlichen Gleichungen besitzt ausnahmslos reelle Wurzeln.

Aus dem Satz I folgt unmittelbar der von Herrn Hölder[1]) stammende und von ihm mittels der Galoisschen Theorie bewiesene[2])

Satz II: Unter den in einem reellen Rationalitätsbereiche irreduziblen Gleichungen mit reellen Wurzeln sind die einzigen, bei denen eine Wurzel durch reelle Radikale dargestellt werden kann, die durch Quadratwurzeln auflösbaren. Die Gradzahl solcher Gleichungen muß eine Potenz von 2 sein.

Da der Grad einer kubischen Gleichung keine Potenz von 2 ist, ergibt sich aus dem Satze II des Herrn Hölder das von ihm zuerst und zwar auch ohne Galoissche Theorie, nämlich ohne Verwendung seines Satzes II bewiesene Resultat[3]), daß bei einer irreduziblen kubischen Gleichung mit drei reellen Wurzeln keine durch reelle Radikale darstellbar ist. Mit Rücksicht auf diesen sogen. casus irreducibilis der kubischen Gleichung halte ich die vorliegenden Untersuchungen so elementar, daß sie, wie ich denke, in einer einführenden Vorlesung über Algebra vorgetragen werden können.

Ich leite alles einheitlich aus den folgenden zwei Sätzen ab, deren sich übrigens auch Herr Hölder[4]) bei seinem elementaren Beweis für den casus irreducibilis der kubischen Gleichung bedient:

A. Sind $J_1(x)=0$ und $J_2(x)=0$ zwei im Rationalitätsbereiche P irreduzible Gleichungen der Grade n_1 und n_2 mit den Wurzeln η_1 und η_2 und sind die Grade der Gleichungen, denen η_1 nach Adjunktion von η_2 und η_2 nach Adjunktion von η_1 genügen, n_1' bzw. n_2', so ist $\frac{n_1}{n_1'}=\frac{n_2}{n_2'}$. Dieser von Kronecker[5]) in seinen Vorlesungen vorgetragene und von Herrn Kneser[6]) selbständig gefundene und zuerst veröffentlichte Satz kann als elementar gelten. Herr Kneser[7]) hat ihn mittels solcher Hilfs-

[1]) O. Hölder, Über den casus irreducibilis bei der Gleichung dritten Grades, Math. Annalen **38** (1891), S. 312

[2]) A. Kneser, Bemerkungen über den sogen. casus irreducibilis bei kubischen Gleichungen, Math. Annalen **41** (1893), S. 344–348, beweist den Hölderschen Satz ohne Galoissche Theorie unter der Voraussetzung, daß die fragliche Gleichung eine Normalgleichung ist, d. h. daß sich alle ihrer Wurzeln rational durch eine ausdrücken lassen.

[3]) Vgl. O. Hölder, a. a. O. S. 309—310.

[4]) Vgl. Anmerkung [3]). Die Formulierung des im Texte folgenden Satzes B. für eine Normalgleichung und die Verwandlung der kubischen Gleichung durch Adjunktion der Quadratwurzel der Diskriminante in eine Normalgleichung, wie sie Herr Hölder hat, ergibt keine Vereinfachung.

[5]) Vgl. Hölder, a. a. O. S. 309.

[6]) A. Kneser, Über Gattungen algebraischer Größen, Math. Annalen **30** (1887), S. 195.

[7]) Vgl. die Darstellung bei A. Kneser, Über die algebraische Unauflösbarkeit höherer Gleichungen, Journ. f. r. u. ang. Math. **106** (1890), S. 52.

mittel bewiesen, wie sie Gauß schon 1801 bei Abfassung seiner Disquisitiones arithmeticae besaß. Einen einfachen Beweis im Anschluß an Frobenius[8]), der sich auch in einer Elementarvorlesung vortragen läßt, findet man in meinem Aufsatz: „Eine algebraische Behauptung von Gauß“[9]).

B. Wird eine im Rationalitätsbereiche P irreduzible Gleichung $J(x) = 0$ durch Adjunktion aller Wurzeln einer Gleichung $f(x) = 0$ mit Koeffizienten aus P reduzibel, so zerfällt $J(x)$ in lauter verschiedene, im erweiterten Rationalitätsbereiche irreduzible Faktoren gleichen Grades.

Der Vollständigkeit wegen beweise ich den Satz B. im Anschluß an Herrn Hölder[10]). Statt dem Rationalitätsbereiche P alle Wurzeln von $f(x) = 0$ zu adjungieren, genügt die Adjunktion einer Größe λ_1 von folgender Eigenschaft: λ_1 ist eine ganze rationale Funktion aller Wurzeln von $f(x) = 0$ mit Koeffizienten aus P, und jede Wurzel von $f(x) = 0$ ist rational mit Koeffizienten aus P durch λ_1 darstellbar. Die Größe λ_1 genügt einer Normalgleichung $N(x) = 0$ in P, d. h. einer in P irreduziblen Gleichung, deren sämtliche Wurzeln rational mit Koeffizienten aus P durch λ_1 darstellbar sind. Dies ist der Vorbereitungssatz für die Galoissche Theorie, der schon Abel (Journ. f. r. u. ang. Math. **4** (1829), S. 261 = Œuvres par Sylow et Lie, I, p. 547) bekannt war. Sei $F_1(x; \lambda_1)$ einer der nach Adjunktion von λ_1 zum Rationalitätsbereiche P irreduziblen Faktoren von $J(x)$; dann hat man eine Zerlegung $J(x) = F_1(x; \lambda_1) \cdot G(x; \lambda_1)$. Mittels der Gleichung $N(\lambda_1) = 0$ lassen sich $F_1(x; \lambda_1)$ und $G(x; \lambda_1)$ als ganze rationale Funktionen von λ_1 annehmen.

Die Relation $J(x) = F_1(x; \lambda_1) \cdot G(x; \lambda_1)$ kann dann dahin gedeutet werden, daß die Gleichung $J(x) = F_1(x; y) \cdot G(x; y)$ mit der in P irreduziblen Gleichung $N(y) = 0$ die Wurzel λ_1 gemeinsam hat. Folglich besteht nach der Grundeigenschaft irreduzibler Gleichungen für alle x des Rationalitätsbereiches P die Relation $J(x) = F_1(x; \lambda_i) \cdot G(x; \lambda_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$, bei der λ_i jede der ν Wurzeln der irreduziblen Gleichung $N(x) = 0$ bedeutet. Da die Gleichung $J(x) = F_1(x; \lambda_i) \cdot G(x; \lambda_i)$ für unendlich viele x gilt und ihre linke Seite eine ganze rationale Funktion von x ist, hat man in $J(x) = F_1(x; \lambda_i) \cdot G(x; \lambda_i)$ eine für jedes x identisch bestehende Gleichung vor sich. Die letzte Relation $J(x) = F_1(x; \lambda_i) \cdot G(x; \lambda_i)$ besagt, daß $J(x)$ durch alle Größen $F_1(x; \lambda_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$ teilbar ist; diese gehören sämtlich, da jedes λ_i

[8]) G. Frobenius, Math. Annalen **70** (1911), S. 457.

[9]) A. Loewy, Jahresbericht der deutschen Math. Vereinigung **26** (1917), S. 101 bis 103.

[10]) Vgl. Hölder, a. a. O. S. 310.

$(i = 1, 2, \ldots, \nu)$ eine rationale Funktion von λ_1 ist, dem Rationalitätsbereich $(P; \lambda_1)$ an. Sie sind in ihm irreduzibel. Wäre nämlich $F_1(x; \lambda_i)$ im Bereiche $(P; \lambda_1)$ zerlegbar in $F_1(x; \lambda_i) = H(x; \lambda_1) \cdot K(x; \lambda_1)$, so würde hieraus, da bei einer Normalgleichung alle Wurzeln rationale Funktionen einer jeden sind, also λ_1 auch gleich einer rationalen Funktion $\varphi_i(\lambda_i)$ von λ_i sein muß, $F_1(x; \lambda_i) = H(x; \varphi_i(\lambda_i)) \cdot K(x; \varphi_i(\lambda_i))$ folgen. Hieraus würde sich aber $F_1(x; \lambda_1) = H(x; \varphi_i(\lambda_1)) \cdot K(x; \varphi_i(\lambda_1))$ ergeben; dies würde aber die Zerlegbarkeit der in $(P; \lambda_1)$ irreduziblen Funktion $F_1(x; \lambda_1)$ bedeuten. Infolge ihrer Irreduzibilität im Rationalitätsbereiche $(P; \lambda_1)$ sind je zwei der Funktionen $F_1(x; \lambda_i)$ und $F_1(x; \lambda_k)$, wobei λ_i und λ_k irgend zwei der ν Größen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ bedeuten, entweder teilerfremd oder bis auf einen konstanten Faktor übereinstimmend. Es seien $F_1(x; \lambda_1)$, $F_1(x; \lambda_2), \ldots, F_1(x; \lambda_\mu)$ die verschiedenen der ν Funktionen $F_1(x; \lambda_1)$, $F_1(x; \lambda_2), \ldots, F_1(x; \lambda_\nu)$. Dann erhält man

$$J(x) = F_1(x; \lambda_1) \cdot F_1(x; \lambda_2) \ldots F_1(x; \lambda_\mu) \cdot \psi(x; \lambda_1),$$

wobei $\psi(x; \lambda_1)$ ebenso wie die $F_1(x; \lambda_i)$ eine Funktion mit Koeffizienten aus $(P; \lambda_1)$ ist. Bildet man nun mit allen Wurzeln von $N(x) = 0$ das Produkt $F_1(x; \lambda_1) \cdot F_1(x; \lambda_2) \ldots F_1(x; \lambda_\nu)$, so ist dieses als symmetrische Funktion der Gleichungswurzeln von $N(x) = 0$ eine Funktion $L(x)$ mit Koeffizienten aus P. Da $L(x)$ und $J(x)$ beide durch $F_1(x; \lambda_1)$ teilbar sind, haben sie mindestens eine Wurzel gemeinsam, und infolge der Irreduzibilität von $J(x)$ muß $L(x)$ durch $J(x)$ teilbar sein. Aus dem Bau der Funktion $L(x)$ und $J(x)$ folgt, daß $\psi(x)$ ein Teiler von $F_1(x; \lambda_{\mu+1}) \cdot F_1(x; \lambda_{\mu+2}) \ldots F_1(x; \lambda_\nu)$ zu sein hat. Mithin würde $\psi(x)$, wenn es eine Funktion von x wäre, mindestens einen Linearfaktor enthalten, der auch in $F_1(x; \lambda_1) \cdot F_1(x; \lambda_2) \ldots F_1(x; \lambda_\mu)$, dem Produkt der verschiedenen der Funktionen $F_1(x; \lambda_i)$ auftritt. Dann hätte aber $J(x)$ im Gegensatz zu seiner Irreduzibilität eine mehrfache Wurzel. Folglich muß $\psi(x)$ eine Konstante sein, und die Zerlegung

$$J(x) = F_1(x; \lambda_1) \cdot F_1(x; \lambda_2) \ldots F_1(x; \lambda_\mu) \cdot C$$

erweist den Satz B als richtig; denn die μ rechtsstehenden Funktionen sind von gleichem Grade in x und in dem durch die Adjunktion aller Wurzeln von $f(x) = 0$ erweiterten Rationalitätsbereiche irreduzibel, da dieser der Bereich $(P; \lambda_1)$ ist.

Wir wenden uns wieder zu Satz A. Nach ihm hat man $\frac{n_1}{n_1'} = \frac{n_2}{n_2'}$; d. h. wenn $n_1' < n_1$, so ist auch $n_2' < n_2$; die Gleichungen $J_1(x) = 0$ und $J_2(x) = 0$ reduzieren sich also gegenseitig. Wird im besonderen $J_1(x)$ durch Adjunktion einer Wurzel einer Gleichung $J_2(x) = 0$ vom Primzahlgrad $n_2 = p$ reduzibel, so wird auch $J_2(x)$ bei Adjunktion einer, also a fortiori aller Wurzeln von $J_1(x)$ reduzibel und zerfällt nach Satz B wegen seines Primzahlgrades in Faktoren ersten Grades, d. h. die Wurzeln von $J_2(x) = 0$ sind rationale Funktionen derjenigen von $J_1(x) = 0$ mit Koeffizienten aus P. Mithin ergibt sich:

C. Hat man zwei im Rationalitätsbereiche P irreduzible Gleichungen $J_1(x) = 0$ und $J_2(x) = 0$ und wird $J_1(x)$ durch Adjunktion einer Wurzel von $J_2(x)$ reduzibel, so sind die Wurzeln von $J_2(x) = 0$, wenn $J_2(x)$ vom Primzahlgrade p ist, rationale Funktionen derjenigen von $J_1(x) = 0$.

Nach diesen Vorbereitungen beweise ich den am Anfang angegebenen Satz I und benütze dabei die bei seiner Formulierung verwandten Bezeichnungen. $J(x) = 0$ sei die im reellen Rationalitätsbereiche P irreduzible Gleichung n-ten Grades mit lauter reellen Wurzeln; eine von ihnen ζ_1 lasse sich durch die reellen Größen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_k$ ausdrücken. Adjungiert man dem Bereiche P der Reihe nach $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$, so sei ϱ_α die erste dieser Größen, deren Adjunktion $J(x) = 0$ reduzibel macht. In dem Rationalitätsbereiche $(P, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\alpha)$ genügt dann ζ_1 einer irreduziblen Gleichung, deren Grad n' kleiner als n ist. Es sei p_α der Grad der in $(P, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{\alpha-1})$ irreduziblen Gleichung $X_\alpha(x) = 0$, der ϱ_α genügt; nach Voraussetzung soll der Grad p_α von $X_\alpha(x) = 0$, wie der jeder Hilfsgleichung $X_i(x) = 0$, eine Primzahl sein. Nach dem Kronecker-Kneserschen Satz A hat man $\frac{n}{n'} = \frac{p_\alpha}{h'_\alpha}$, wenn h'_α der Grad derjenigen irreduziblen Gleichung ist, der ϱ_α nach Adjunktion von ζ_1 zum Rationalitätsbereiche $(P, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{\alpha-1})$ genügt. Wegen des Primzahlgrades p_α sind nach C die Wurzeln der Hilfsgleichung $X_\alpha(x) = 0$ rationale Funktionen der Wurzeln von $J(x) = 0$ mit Koeffizienten aus $(P, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{\alpha-1})$. Da alle Wurzeln von $J(x) = 0$ ebenso wie der Rationalitätsbereich $(P, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{\alpha-1})$ reell sind, hat $X_\alpha(x) = 0$ lauter reelle Wurzeln.

Adjungiert man weiter die auf ϱ_α folgenden Größen, so bleibe die Gleichung n'-ten Grades für ζ_1 irreduzibel bis zur Adjunktion von ϱ_β. In dem Bereiche $(P, \varrho_1, \ldots, \varrho_\alpha, \ldots, \varrho_\beta)$ genüge ζ_1 einer irreduziblen Gleichung vom Grade $n'' < n'$. Hat dann die im Bereiche $(P, \varrho_1, \ldots, \varrho_\alpha, \ldots, \varrho_{\beta-1})$ irreduzible Gleichung $X_\beta(x) = 0$, der die reelle Größe ϱ_β genügt, den Primzahlgrad p_β, so ist $\frac{n'}{n''} = \frac{p_\beta}{h'_\beta}$, wobei h'_β den Grad der im erweiterten Rationalitätsbereiche $(P, \varrho_1, \ldots, \varrho_\alpha, \ldots, \varrho_{\beta-1}, \zeta_1)$ irreduziblen Gleichung bedeutet, die ϱ_β befriedigt. Da $X_\beta(x) = 0$ vom Primzahlgrad sein soll, ergibt sich aus der Reellität der Wurzeln von $J(x) = 0$, also auch derjenigen des Teilers von $J(x)$ vom Grade n', dem ζ_1 im Rationalitätsbereiche $(P, \varrho_1, \ldots, \varrho_\alpha, \ldots, \varrho_{\beta-1})$ genügt, und der Reellität des zuletzt genannten Rationalitätsbereiches, daß $X_\beta(x)=0$ nach Satz C nur reelle Wurzeln besitzt. Derart fortfahrend, erhält man die weiteren Beziehungen $\frac{n''}{n'''}=\frac{p_\gamma}{h'_\gamma}$, $\frac{n'''}{n^{(4)}}=\frac{p_\delta}{h'_\delta}$, ..., und die Hilfsgleichungen $X_\gamma(x)=0$, $X_\delta(x)=0,\ldots$ haben lauter reelle Wurzeln.

Da ζ_1 schließlich rational in $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_k$ wird, also am Ende einer Gleichung ersten Grades genügt, ergibt sich die Schlußrelation $\frac{n^{(t-1)}}{1}=\frac{p_\tau}{h'_\tau}$; hierbei ist p_τ der Primzahlgrad jener irreduziblen Gleichung $X_\tau(x)=0$, deren Wurzel ϱ_τ bewirkt, daß ζ_1 rational bekannt wird, und h'_τ bedeutet den Grad der irreduziblen Gleichung, der ϱ_τ in dem durch Adjunktion von ζ_1 erweiterten Rationalitätsbereiche $(P, \varrho_1, \ldots, \varrho_\alpha, \ldots, \varrho_{\tau-1}, \zeta_1)$ genügt. $X_\tau(x)=0$ hat infolge seines Primzahlgrades, der reellen Wurzeln von $J(x)=0$, also auch derjenigen des in $(P, \varrho_1, \ldots, \varrho_\alpha, \ldots, \varrho_{\tau-1})$ irreduziblen Teilers $n^{(t-1)}$-ten Grades, dem ζ_1 genügt, und der Reellität des zuletzt genannten Rationalitätsbereiches nach Satz C lauter reelle Wurzeln.

Die Multiplikation der gefundenen Gleichungen gibt

$$\frac{n}{n'}\cdot\frac{n'}{n''}\cdots\frac{n^{(t-1)}}{1}=\frac{p_\alpha\cdot p_\beta\cdots p_\tau}{h'_\alpha h'_\beta\ldots h'_\tau},$$

oder

$$\frac{p_\alpha\cdot p_\beta\cdots p_\tau}{n}=h'_\alpha\cdot h'_\beta\ldots h'_\tau$$

Da das Produkt $p_\alpha\cdot p_\beta\ldots p_\tau$ durch n teilbar ist, müssen unter den Zahlen $p_\alpha, p_\beta, \ldots, p_\tau$ alle Primfaktoren $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_f$ von $n=\bar{p}_1\bar{p}_2\ldots\bar{p}_f$ auftreten, und jede dieser Primzahlen entspricht einer Hilfsgleichung mit lauter reellen Wurzeln. Diese f Gleichungen der Grade $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_f$ mit lauter reellen Wurzeln sind unvermeidlich. Hiermit ist Satz I bewiesen.

Ich wende mich nun zum Satze II. Läßt sich eine Wurzel einer Gleichung durch Radikale darstellen, so kann man ausschließlich solche verwenden, deren Exponenten Primzahlen sind. Diese Radikale werden eingeführt durch reine Gleichungen $x^p=a$ vom Primzahlgrade. Diese Gleichungen sind irreduzibel; denn wären sie reduzibel, so hätten sie eine rationale Wurzel, a wäre die p-te Potenz einer Zahl aus dem Rationalitätsbereiche[11]) und die Adjunktion der einzigen reellen Wurzel der Gleichung würde den Rationalitätsbereich nicht erweitern. Läßt sich nun der Grad n der irreduziblen Gleichung $J(x)=0$ mit lauter reellen Wurzeln durch eine Primzahl $\bar{p}$ teilen, so muß bei den zu verwendenden Hilfs-

[11]) Abel, Journ. f. r. u. ang. Math. 1 (1826), S. 71 Œuvres par Sylow et Sie, I, S. 72. Kronecker, Monatsberichte der Berliner Akademie 1879, S. 206.

gleichungen, da nur reelle Größen benützt werden sollen, nach Satz I auch stets eine vom Grade $\bar{p}$ mit lauter reellen Wurzeln auftreten. In unserem Falle der Darstellung durch Radikale, wo nur reine Gleichungen als Hilfsgleichung benützt werden dürfen, hat demnach eine Hilfsgleichung $x^{\bar{p}} = a$ zur Verwendung zu kommen. Da diese für $\bar{p} > 2$ nicht lauter reelle Wurzeln hat, kann $\bar{p}$ nur den Wert 2 besitzen, und es muß der Grad n von $J(x)$, wie bewiesen werden soll, eine Potenz von 2 sein. Der casus irreducibilis der kubischen Gleichung ist durch Satz II erledigt.

Freiburg i. Br., 6. August 1920.

(Eingegangen am 14. August 1920.)